25/11/2016

Ασκήσεις

Άσκηση 5

$a_1 = 1$

$$a_{\nu+1} = \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu} = \frac{\frac{3}{2}(3+2a_\nu)-\frac{1}{2}}{3+2a_\nu} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6+4a_\nu}$$

$a_1 = 1$ Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $a_\nu \le a_{\nu+1}$

$a_2 = \frac{7}{5}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$a_3 = \frac{13}{9}$ Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι $a_\nu > 0 \ \forall \nu$

Πρώτο επαγωγικό βήμα: $a_1 \le a_2 \Leftrightarrow 1 \le \frac{7}{5}$ ισχύει

Γενικό επαγωγικό βήμα: $a_\nu \le a_{\nu+1} \Rightarrow 4a_\nu \le 4a_{\nu+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4a_\nu + 6 \le 4a_{\nu+1} + 6 \Rightarrow \frac{1}{4a_{\nu+1}+6} \le \frac{1}{4a_\nu+6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4a_\nu+6} \le -\frac{1}{4a_{\nu+1}+6}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{4a_\nu+6} \le \frac{3}{2} - \frac{1}{4a_{\nu+1}+6}$$

$$\Rightarrow a_{\nu+1} \le a_{\nu+2}$$

Επίσης ισχύει $a_\nu \le \frac{3}{2}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

(Πράγματι για $\nu = 1$ $a_1 = 1 \le \frac{3}{2}$

Για $\nu \ge 1$ $a_{\nu+1} = \frac{3}{2} - \underbrace{(\quad)}_{>0} \le \frac{3}{2}$)

Εφόσον η (a_ν) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη θα είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $x = \lim a_\nu$

$$a_n \to x \Rightarrow \begin{cases} 4+3a_n \to 4+3x \\ 3+2a_n \to 3+2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4+3a_n}{3+2a_n} \longrightarrow \frac{4+3x}{3+2x} \Rightarrow a_{n+1} \longrightarrow \frac{4+3x}{3+2x}$$

$$a_n \to x \rightarrow a_{n+1} \longrightarrow x$$

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας $x = \dfrac{4+3x}{3+2x}$

$$\Leftrightarrow \cancel{3x} + 2x^2 = 4 + \cancel{3x} \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Εφόσον $a_n \geq 0 \ \forall n$ και $a_n \to x$ θα έχουμε $x \geq 0$

Επομένως $x = \sqrt{2}$ δηλαδή $\lim a_n = \sqrt{2}$

Άσκηση 6.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$x_1 = 1$

$x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$

$x_1 \quad x_3 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_4 \quad x_2$

a) Να δ.ο. $1 \leq x_n \leq 2 \quad \forall n$

<u>Απ</u>

Εύκολα βλέπουμε (με επαγωγή) ότι $x_n > 0 \ \forall n$

~ Για $n=1$ ισχύει.

~ $1 \leq x_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 1 + x_n \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{1+x_n} \leq \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{1+x_n}}_{x_{n+1}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq x_{n+1} \leq 2$$

β) Να δ.ο. $(x_{2\nu-1})$ είναι αύξουσα
$(x_{2\nu})$ είναι φθίνουσα

Απ.

Θέτουμε $a_\nu = x_{2\nu-1}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$a_{\nu+1} = x_{2(\nu+1)-1} = x_{2\nu+1} = 1+\frac{1}{1+x_{2\nu}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\underbrace{x_{2\nu-1}}_{a_\nu}}\right)}$$

$$= 1+\frac{1}{\frac{3+2a_\nu}{1+a_\nu}} = 1+\frac{1+a_\nu}{3+2a_\nu} = \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu}$$

$a_1 = x_1 = 1$

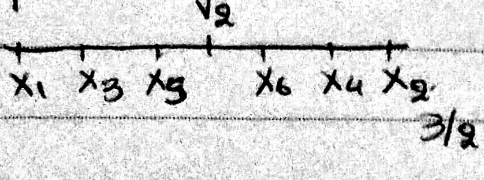
Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι η (a_ν) είναι αύξουσα με $\lim a_\nu = \sqrt{2}$ δηλ. $x_{2\nu-1} \to \sqrt{2}$

Θέτουμε $b_\nu = x_{2\nu}$

$b_1 = \frac{3}{2}$

και όπως πριν $b_{\nu+1} = \frac{4+3b_\nu}{3+2b_\nu} \left(= \frac{3}{2} - \frac{1}{4b_\nu+6} \right)$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή μπορούμε να δ.ο. η (b_ν) είναι φθίνουσα. Στη συνέχεια προκύπτει ότι $b_\nu \to \sqrt{2}$ δηλ. $x_{2\nu} \to \sqrt{2}$. Επομένως $x_\nu \to \sqrt{2}$.



Ασκηση 7

(a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. (ε_n) ακολουθία θετικών ώστε

$\varepsilon_n \to 0$

$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon_n \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

Να δ.ο. η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα

Απόδειξη

Αρκεί να δ.ο. η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία

Εστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $\varepsilon_n \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

να ισχυει $\underbrace{|\varepsilon_n - 0|}_{=\varepsilon_n} < \varepsilon$

Εστω τώρα τυχαία $m, n \in \mathbb{N}$ με $m, n \geq n_0$

→ Αν $m = n$ τοτε $|a_m - a_n| = 0 < \varepsilon$

→ Αν $m > n$

τοτε $\exists k \in \mathbb{N}$ $m = n + k$

$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon_n < \varepsilon$

→ Αν $n > m$ ομοίως

προκύπτει $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία αρα συγκλίνουσα

Ασκηση 8

Δινεται ακολουθια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $0<a<1$ ωστε
$|x_{n+1}-x_n| < a^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$
Να δο. η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι βασικη αρα συγκλινουσα

Αποδ

Για τυχαια $n,k\in\mathbb{N}$

$$|x_{n+k}-x_n| = |(x_{n+k}-x_{n+k-1})+(x_{n+k-1}-x_{n+k-2})+\dots+(x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)|$$

$$\le |x_{n+k}-x_{n+k-1}|+|x_{n+k-1}-x_{n+k-2}|+\dots+|x_{n+2}-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\le a^{n+k-1}+a^{n+k-2}+\dots+a^{n+1}+a^n$$

$$= a^n(1+a+a^2+\dots+a^{k-1}) = a^n\frac{a^k-1}{a-1}$$

$$= a^n\frac{1-a^k}{1-a} < a^n\frac{1}{1-a}$$

Εφοσον $\frac{a^n}{1-a}\to 0$ το συμπερασμα προκυπτει απο την προηγουμενη ασκηση.

Ασκηση

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθια πραγματικων αριθμων με $a_n\to x$. Να δειχθει οτι

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\to x$$

Αποδειξη

Ισχυρισμος Αρκει να δειχθει για την περιπτωση $x=0$

Αποδ.

Αν εχει αποδειχθει για $x=0$ και $a_n\to x$ τοτε $a_n-x\to 0$
Αρα (με δεδομενο οτι ισχυει για 0)

$$\frac{(a_1-x)+(a_2-x)+\cdots+(a_n-x)}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to x$$

Έστω τώρα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$. Εφόσον η (a_n) είναι συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη άρα $\exists M>0$ $|a_n| < M$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον $a_n \to 0$
$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε
$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 \geq \frac{2n_1 \cdot M}{\varepsilon}$
Για κάθε $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{n} \leq \frac{|a_1|+\cdots+|a_{n_1}|+|a_{n_1+1}|+|a_{n_1+2}|+\cdots+|a_n|}{n}$$

$$\leq \frac{\overbrace{(M+M\cdots+M)}^{n_1\text{-φορές}}+\overbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{n-n_1\text{ φορές}}}{n}$$

$$= \frac{n_1 M + (n-n_1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{n_1 M + n\frac{\varepsilon}{2}}{n} = \frac{n_1 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επομένως $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to 0$

Αν
$A \subseteq \mathbb{R}$.
$f: A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα ($\Rightarrow$ 1-1)
η $f: A \to f(A)$ 1-1 και επί
Τότε και η $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Απ</u>
Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$
και θέλουμε να δ.ο. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Υποθέτουμε (προς απαγ. σε άτοπο) ότι αυτό δεν ισχύει.
Τότε $f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1)$ και εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα

$$f(f^{-1}(y_2)) \leq f(f^{-1}(y_1))$$
$$\Rightarrow y_2 \leq y_1 \quad \text{άτοπο.}$$

Επομένως $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Άρα f^{-1} γν. αύξουσα.

Ομοίως αν $f: A \to \mathbb{R}$ γν. φθίνουσα
$f \; A \to f(A)$ 1-1 επί
$f^{-1}: f(A) \to A$ θα είναι επίσης γνησίως φθίνουσα

<u>Θεώρημα</u> Έστω I διάστημα $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1
(οπότε η $f: I \to f(I)$ 1-1 και επί)
Τότε η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι επίσης συνεχής

Αποδ.
Από τα προηγούμενα (πορ. θεωρ. ενδιαμ. τιμών)
το $J = f(I)$ είναι επίσης διάστημα και η f είναι είτε
γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Υποθέτουμε ότι η $f: I \to \underset{\substack{\| \\ J}}{f(I)}$

είναι γνησίως αύξουσα

Τότε η $f^{-1}: \underset{\substack{\| \\ f(I)}}{J} \to I$ είναι γνησίως αύξουσα

Έστω $y_0 \in J = f(I)$

Υποθέτουμε ότι το y_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $J = f(I)$ (Αν ήταν άκρο η απόδειξη είναι όμοια και ευκολότερη)

Θέτουμε $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Τότε το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I

Έστω $\varepsilon > 0$ Μπορούμε να υποθέσουμε (σε διαφορετική περίπτωση μικραίνουμε το ε) ότι $x_0 - \varepsilon \in I$ $x_0 + \varepsilon \in I$

Αναζητούμε $\delta > 0$

ώστε για κάθε $y \in f(I) = J$ με $|y - y_0|$ να ισχύει

$|f^{-1}(y) - \underset{\substack{\| \\ x_0}}{f^{-1}(y_0)}| < \varepsilon$

Εφόσον $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$ και η f είναι γνησίως αύξουσα

$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$

Τότε $\delta_1 = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$

$\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Έχουμε $\underset{\substack{\| \\ f(x_0) - \delta_1}}{f(x_0 - \varepsilon)} < f(x_0) < \underset{\substack{\| \\ f(x_0) + \delta_2}}{f(x_0 + \varepsilon)}$

Έστω $y \in f(I) = J$ με $|y - y_0| < \delta$

$f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq \underset{\substack{\| \\ f(x_0)}}{y_0} + \delta_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

Απο το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπαρχει $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (και μάλιστα μοναδικό αφου f γν. αύξουσα.)

ωστε $y = f(x)$

$$f(x_0 - \varepsilon) < \underset{\substack{\shortparallel \\ f(x)}}{y} < f(x_0 + \varepsilon)$$

$$\xrightarrow[\text{αυξουσα}]{f^{-1} \text{ γν}} x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f(y_0) + \varepsilon$$

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Επομένως η f^{-1} είναι συνεχής στο y_0

Αυτο αποδείχθηκε για τυχαίο $y_0 \in J = f(I)$

Αρα f^{-1} συνεχής

Εφαρμογή Αν $a \neq 0$ $a > 1$

$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται και είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ γνησίως φθίνουσα $0 < a < 1$

$f_a(x) = a^x$

Θα δ.ο. $f_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

Εξετάζουμε την περίπτωση $a > 1$

Εστω $y \in (0, +\infty)$

Εφοσον $a > 1$ $a^n \to +\infty$

άρα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $a^{n_1} > y$

Επίσης $0 < \frac{1}{a} < 1$ άρα $\left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$

άρα $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{n_2} < y \Rightarrow a^{-n_2} < y$

Ετσι $f_a(-u_2) < y < f_a(u_1)$ Άρα από Θ.Ε.Τ.
(Εφαρμόζεται αφού f_a συνεχής)

$\exists x \in (-u_2, u_1) \subseteq \mathbb{R}$ $f_a(x) = y$.

Επομένως $y \in f_a(\mathbb{R})$

Άρα από το προηγ. Θεωρ.

$f_a^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 επί συνεχής.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται λογαριθμική με βάση α συμβολίζεται $\log_a$.